مقياس: تقنيات كمية
السداسي: الأول: 2021/2022

السنة I: ماستر 1
تخصص: اقتصاد نقدي وبنكي

# التصحيح النموذجي للامتحان

## التمرين I: (12 نقطة)

1/ الفرضيات الكلاسيكية لنموذج الانحدار الخطي البسيط: (4 نقاط)

- الفرضية الأولى: التوقع الرياضي للأخطاء معدوم أي:

$$E(\varepsilon_i) = 0 \quad 0{,}5$$

تعني هذه الفرضية أن الأخطاء ($\varepsilon_i$) لا تدخل في تفسير المتغير التابع (Y). إذ تعتبر أنها حدود عشوائية لا يمكن قياسها. 0,5

- الفرضية الثانية: ثبات تباين أو تشتت الأخطاء أي:

$$E(\varepsilon_i^2) = \delta_\varepsilon^2 \quad 0{,}5$$

وهو ما يعني أن تبعثرها وتشتتها حول المتوسط ثابت 0,5

- الفرضية الثالثة: لا يوجد ارتباط بين الأخطاء المرتكبة على مشاهدات العينة أي:

$$E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 \quad 0{,}5$$

0,5 تعني هذه الفرضية أن الأخطاء مستقلة فيما بينها وليس لها ارتباط بيني

- الفرضية الرابعة: المتغيرة المفسرة (X) هي متغيرة مستقلة، يمكن المسيطرة عليها، بمعنى أنها غير عشوائية.

/ البرهان على أن: (4 نقاط)

$$\hat{\beta} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{V(x)} = r_{xy}\frac{\delta_y}{\delta_x}$$

نعلم أن أن معامل الارتباط ($r_{xy}$) ماهو إلا الجذع التربيعي لجداء $\beta, \beta'$

$$r_{xy} = \sqrt{\beta \cdot \beta'} = \sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2} \cdot \frac{\sum(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})}{\sum(y_i-\bar{y})^2}}$$ 0,5

$$\Rightarrow r_{xy} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2\sum(y_i-\bar{y})^2}} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2}} \quad \ldots (1)$$ 0,5

بقسمة البسط والمقام (1) على (n) تصبح :

$$r_{xy} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})/n}{\sqrt{\frac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}}\sqrt{\frac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n}}} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\delta_x \cdot \delta_y} \quad \ldots (2)$$ 0,5

أما بضرب العلاقة (1) في المقدار $\left(\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}\right)$ فتصبح 0,5

$$r_{xy} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}}{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2}} = \underbrace{\frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}}_{\hat{\beta}}\frac{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}}{\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2}}$$ 0,5

$$\Rightarrow r_{xy} = \hat{\beta}\frac{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}}{\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2}} \quad \ldots (3)$$ 0,5

بقسمة العلاقة (3) على (n) تصبح :

$$r_{xy} = \hat{\beta}\frac{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2/n}}{\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2/n}} = \hat{\beta}\frac{\delta_x}{\delta_y} \Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = r_{xy}\frac{\delta_y}{\delta_x}}$$ 0,5

نعلم أن :

$$\hat{\beta} = \frac{\sum(x_i-\bar{y})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$$

بالقسمة على n تصبح : 0,5

$$\hat{\beta} = \frac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})/n}{\sum(x_i-\bar{x})^2/n} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{V(x)} \Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{V(x)}}$$

(2)

2-2/ البرهان على أن: $\hat{\beta}$ هو تقدير غير متحيز لـ $\beta$ أي: (4 نقاط)

$$E(\hat{\beta}) = \beta$$

لدينا:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

$$y_1 = \alpha + \beta x_1 + \varepsilon_1$$

$$y_2 = \alpha + \beta x_2 + \varepsilon_3$$

$$\vdots$$

$$y_n = \alpha + \beta x_n + \varepsilon_n$$ 0.5ن

$$\sum y_i = n\alpha + \beta \sum x_i + \sum \varepsilon_i \Rightarrow \sum y_i / n = {}^n/_n \alpha + \beta \sum x_i / n + \sum \varepsilon_i / n .$$

$$\Rightarrow \bar{y} = \alpha + \beta \bar{x} + \bar{\varepsilon}$$ 0.5ن

$$\Rightarrow y_i - \bar{y} = (\alpha + \beta x_i + \varepsilon_i) - (\alpha + \beta \bar{x} + \bar{\varepsilon}) .$$

$$\Rightarrow y_i - \bar{y} = (\alpha - \alpha) + \beta (x_i - \bar{x}) + (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}) \Rightarrow$$

$$\boxed{y_i - \bar{y} = \beta (x_i - \bar{x}) + (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})}$$ 0.5ن

لدينا سابقا:

$$\hat{\beta} = \sum w_i (y_i - \bar{y}) \Rightarrow \hat{\beta} = \sum w_i \left[ \beta (x_i - \bar{x}) + (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}) \right]$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \beta \sum w_i (x_i - \bar{x}) + \sum w_i (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}) .$$

نعلم أن: $\Leftarrow \sum w_i (x_i - \bar{x}) = 1$

$$\hat{\beta} = \beta + \sum w_i (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}) = \beta + \sum w_i \varepsilon_i + \sum w_i \bar{\varepsilon}$$ 0.5ن

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \beta + \sum w_i \varepsilon_i + \bar{\varepsilon} \underbrace{\sum w_i}_{0}$$

نعلم كذلك: $\Leftarrow \sum w_i = 0 .$

$$\hat{\beta} = \beta + \sum w_i \varepsilon_i$$ 0.5ن

لمعرفة تحيز $\hat{\beta}$ نقوم بحساب توقعه الرياضي حيث:

$$E(\hat{\beta}) = E\left[\beta + \sum w_i \varepsilon_i\right] = \underbrace{E(\beta)}_{\beta} + E\left(\sum w_i \varepsilon_i\right)$$ 0.5ن

$$\Rightarrow E(\hat{\beta}) = \beta + \sum w_i \underbrace{E(\varepsilon_i)}_{0} \Rightarrow \boxed{E(\hat{\beta}) = \beta}$$ 0.5ن

## التمرين II : (08 نقاط)

1/ تقدير معالم النموذج $\alpha$ ، $\beta$ أي حساب: $\hat{\alpha}$ ، $\hat{\beta}$ .

لدينا :

$$* \; r_{xy} = \frac{\delta_x}{\delta_y}\hat{\beta} = 0,96 \Rightarrow 0,96 = \hat{\beta}\,\frac{25,33}{42,16} \Rightarrow$$ (0,5 ن)

$$\hat{\beta} = \frac{0,96 \times 42,16}{25,33} = 1,6 \Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = 1,6}$$ (0,5 ن)

$$* \; \hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\,\bar{x} \Rightarrow \hat{\alpha} = 90,2 - (1,6)(36,5) \Rightarrow \boxed{\hat{\alpha} = 31,8}$$ (0,5 ن) (0,5 ن)

2/ لدينا : $r_{xy} = 0,96$ (0,5 ن) هذا يعني وجود علاقة ارتباطية طردية وقوية (0,5 ن) بين المتغيرين .

3/ نعلم أن :

$$R^2 = (r_{xy})^2 = (0,96)^2 \Leftarrow r_{xy} = \sqrt{R^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{R^2 = 0,92}$$ (0,5 ن)

هذا يعني أن حوالي 92% من تغيرات المتغيرة التابعة مفسرة بدلالة المتغيرة المستقلة . في حين تبقى حوالي 8% فهي مفسرة بدلالة متغيرات أخرى غير مدرجة في المعادلة . (0,5 ن)

4/ نعلم أن :

$$\delta^2_{\varepsilon} = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n-2}$$ (0,5 ن) $$, \; R^2 = \frac{SCE}{SCT} = \frac{\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum(y_i - \bar{y})^2}$$ (0,5 ن)

و :

$$\sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{\beta}^2 \sum(x_i - \bar{x})^2$$ (0,5 ن)

و : لدينا :

$$\delta^2_x = \frac{\sum(x_i - \bar{x})}{n} \Rightarrow \sum(x_i - \bar{x})^2 = n\,\delta^2_x = 10\,(25,33)^2 = \boxed{641,61}$$ (0,5 ن)

$$SCE = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 = (1,6)^2(641,61) \Rightarrow \boxed{SCE = 16,425,21}$$ (0,5 ن)

نعلم أن :

$$SCT = SCE + SCR \Rightarrow \sum(y_i - \bar{y})^2 = \sum(\hat{y}_i - \bar{y})^2 + \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$R^2 = \frac{SCE}{SCT} \Rightarrow SCT = \frac{SCE}{R^2} \Rightarrow SCT = \sum(y_i - \bar{y}) = \frac{16,425}{0,92} = \boxed{17853,49}$$ (0,5 ن)

$$\Rightarrow SCR = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum e_i^2 = SCT - SCE = 17853,49 - 16425,21 = 1428,28$$

$$\Rightarrow \sum e_i^2 = 14,28,28 \Rightarrow \delta^2_{\varepsilon} = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{1428,28}{10-2} \Rightarrow \boxed{\hat{\delta}^2_{\varepsilon} = 178,53}$$ (0,5 ن) (0,5 ن)

المركز الجامعي مرسلي عبد الله – تيبازة

معهد العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم : العلوم الاقتصادية

السنة الأولى ماستر

تخصص: اقتصاد نقدي وبنكي

السداسي الأول- 2022/2021

المقياس: تقنيات كمية

المدة : ساعة واحدة

**التمرين الأول :** أجب على الأسئلة التالية :

1. أذكر الفرضيات الكلاسيكية الأساسية الأربعة لنموذج الانحدار الخطي البسيط مع الشرح الموجز .
2. برهن أن :

$$\checkmark \quad \widehat{\beta} = \frac{cov(X,Y)}{v(X)} = r_{XY}\frac{\delta_Y}{\delta_X}$$

✓ $\widehat{\beta}$ هو تقدير غير متحيز لـ $\beta$ أي : $E(\widehat{\beta}) = \beta$

**التمرين الثاني :** إذا كانت لدينا المعطيات التالية :

معامل الارتباط $r = 0.96$ ، الانحراف المعياري لكل من $X$ و $Y$ على التوالي : 25.33 و 42.16 والمتوسط الحسا

منهما على التوالي : 36.5 و 90.2 ، عدد المشاهدات 10.

**المطلوب :**

1. قدر معالم النموذج $\alpha$ و $\beta$.
2. أحسب قوة العلاقة الإرتباطية .
3. قيم جودة تمثيل النموذج .
4. قدر قيمة تباين الخطأ $\delta_{e_i}^2$ للنموذج.

أ.د.اعمر بوزيد امحمد

تمنياتي بالتوفيق