المركز الجامعي عبد الله مرسلي- تيبازة

معهد العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم : علوم اقتصادية — الموسم الجامعي: 2023/2022 .السداسي: الأول

السنة الأولى ماستر — المقياس: تقنيات كمية

تخصص: اقتصاد نقدي وبنكي — المدة : ساعة ونصف

امتحان الدورة العادية

التمرين الأول: أجب على الأسئلة التالية :

1. أذكر الفرضيات الكلاسيكية الأساسية الأربعة لنموذج الانحدار الخطي البسيط مع الشرح الموجز .
2. برهن على مايلي :

✓ $$\hat{\beta}=\frac{cov(x,y)}{v(x)}=r_{xy}\frac{\delta_y}{\delta_x}$$

✓ $\hat{\beta}$ هو تقدير غير متحيز لـ β أي : $E(\hat{\beta})=\beta$

التمرين الثاني: لتكن لدينا المعطيات التالية المتعلقة بـ 100 مشاهدة خاصة بسلسلة زمنية للمتغيرات (x_2,x_1,y) كما يلي :

$$\bar{x_2}=1 \text{ ، } \bar{y}=12 \text{ ، } v(y)=1000 \text{ ، } r^2_{x_1y}=0.75 \text{ ، } r^2_{x_2y}=0.85 \text{ ، } r^2_{x_1x_2}=0.45$$

المطلوب:

1- بعد تقدير **النموذج الأول** تحصلنا على :

$$\hat{y}=10x_1-6$$

✓ هل معامل الانحدار y على x_1 له معنوية إحصائية عند مستوى 5 % .

2- عند تقدير **النموذج الثالث** تحصلنا على :

$$\hat{y}=\hat{\alpha}+4x_2$$

✓ كم تبلغ قيمة المعامل $\hat{\alpha}$.

✓ هل معامل الانحدار y على x_2 له معنوية إحصائية عند مستوى 5 % .

3- إذا كان لدينا النموذج الخطي المتعدد التالي :

$$y=\beta_0+\beta_1x_1+\beta_2x_2+\varepsilon$$

✓ أحسب قيمة معالم النموذج المقدرة $(\hat{\beta}_2 \text{، } \hat{\beta}_1)$ فقط.

مع تمنياتي بالتوفيق

أ.د/ اعمر بوزيد امحمد

السنة الاولى ماستر — التصحيح النموذجي للامتحان — مقياس : تقنيات كمية
اقتصاد نقدي وبنكي — الموسم الجامعي : 2022/2023

التمرين 1 : (نقاط)

1/ الفرضيات الاساسية الاربعة (02 نقطة)

① التوقع الرياضي للاخطاء معدوم : $E(\varepsilon_i) = 0$ (0,5)
أي أن الاخطاء لا تدخل في تفسير المتغيرة التابعة (Y_i) ولا يمكن تحديدها أو قياسها بدقة.

② تجانس تباين الأخطاء : $E(\varepsilon_i^2) = \hat{\delta}^2$ (0,5)
بمعنى أن توزع الأخطاء حول متوسطها ثابت

③ لا يوجد إرتباط ذاتي بين الاخطاء : $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ (0,5)

④ لا يوجد علاقة إرتباط بين المتغير العشوائي (ε_i) والمتغير المستقل (X_i) : $Cov(X_i, \varepsilon_i) = 0$

⑤ الاخطاء (ε_i) تتوزع توزيعًا طبيعيًا. (0,5)
$\varepsilon_i \sim N(0, \delta^2)$

2/ لدينا : (04 نقاط)

$$r_{xy} = \sqrt{\beta \cdot \beta'} = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}}\sqrt{\frac{\Sigma(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})}{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}} \quad (0,5)$$

$$\Rightarrow r_{xy} = \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}} \quad \ldots ① \quad (0,5)$$

- بقسمة العلاقة رقم ① على n نتحصل على :

$$r_{xy} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{Cov(X,Y)}{\delta_x \delta_y}$$

- أما عند ضرب العلاقة رقم ① في العبارة ($\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}$) تصبح : (0,5)

$$r_{xy} = \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) \cdot \sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}}{\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}} = \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2\sqrt{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}} \quad (0,5)$$

ونعلم أن: (2) — $\hat{\beta} = \dfrac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum(x_i-\bar{x})^2}$

تصبح: $r_{xy} = \hat{\beta} \cdot \dfrac{\sqrt{\sum(x_i-\bar{x})^2}}{\sqrt{\sum(y_i-\bar{y})^2}}$ — (3) (0.5)

بقسمة البسط والمقام في العبارة رقم (3) على n تصبح:

$$r_{xy} = \hat{\beta} \cdot \frac{\sqrt{\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}}}{\sqrt{\dfrac{\sum(y_i-\bar{y})^2}{n}}} \Rightarrow r_{xy} = \hat{\beta} \cdot \frac{\hat{\sigma}_x}{\hat{\sigma}_y} \Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = r_{xy} \cdot \frac{\hat{\sigma}_y}{\hat{\sigma}_x}}$$

(0.5) (0.5)

أما عند قسمة العلاقة رقم (2) على n تصبح:

$$\hat{\beta} = \frac{\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{n}}{\dfrac{\sum(x_i-\bar{x})^2}{n}} \Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = \frac{cov(x,y)}{V(x)}}$$ (0.5)

ومنه فإن:

$$\boxed{\hat{\beta} = \frac{cov(x,y)}{V(x)} = r_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}}$$

وهو المطلوب إثباته

3.2/ لدينا: (4 ن)

أي:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$
$$y_1 = \alpha + \beta x_1 + \varepsilon_1$$
$$y_2 = \alpha + \beta x_2 + \varepsilon_2$$
$$\vdots$$
$$y_n = \alpha + \beta x_n + \varepsilon_n$$

$$\sum y_i = n\alpha + \beta \sum x_i + \sum \varepsilon_i$$ (0.5)

بالقسمة على n:

$$\sum y_i / n = \frac{n}{n}\alpha + \beta \sum x_i / n + \frac{\sum \varepsilon_i}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{y} = \alpha + \beta \bar{x} + \bar{\varepsilon}} \text{ — (1)}$$ (0.5)

(0.5)

$$*\ (y_i - \bar{y}) = (\alpha + \beta x_i + \varepsilon_i) - (\alpha + \beta\bar{x} + \bar{\varepsilon}) = (\alpha - \alpha) + \beta(x_i - \bar{x}) + (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})$$

$$\Rightarrow \boxed{(y_i - \bar{y}) = \beta(x_i - \bar{x}) + (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})}$$ (0.5)

$\hat{\beta} = \sum w_i y_i$ (0,5) نعلم سابقاً أن :

حيث : $w_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$

$y_i = (Y_i - \bar{Y})$.

$\Rightarrow \hat{\beta} = \sum w_i \left[\beta (x_i - x) + (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}) \right]$

$\Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = \beta \sum w_i (x_i - \bar{x}) + \sum w_i (\varepsilon_i - \varepsilon)}$ (0,5)

نعلم أيضاً أن : $\sum w_i = 0$ ✓

$\sum w_i (x_i - \bar{x}) = 1$ ✓

يعني أن : $\hat{\beta} = \beta + \sum w_i (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon}) = \beta + \sum w_i \varepsilon_i + \sum w_i \bar{\varepsilon}$

$\Rightarrow \hat{\beta} = \beta + \sum w_i \varepsilon_i + \bar{\varepsilon} \sum w_i \Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = \sum w_i \varepsilon_i}$ (0,5)

لمعرفة تحيز $(\hat{\beta})$ يجب حساب توقعه الرياضي أي : $E(\hat{\beta}) = ?$

بحيث : $E(\hat{\beta}) = E\left(\beta + \sum w_i \varepsilon_i\right) = E(\beta) + E\left(\sum w_i \varepsilon_i\right)$

$\Rightarrow E(\hat{\beta}) = \beta + \sum w_i E(\varepsilon_i) \to 0 = \boxed{E(\hat{\beta}) = \beta}$ (0,5)

وهذا يعني أن $(\hat{\beta})$ هو تقدير غير متحيز لـ β .

التمرين II : (10 نقاط)

1/ يعطى تباين $(\hat{\beta})$ وفق العلاقة التالية :

$\hat{\delta}^2_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\delta}^2_{\varepsilon}}{\sum (x_{1t} - \bar{x}_1)^2}$ (0,25)

حيث : $\boxed{\hat{Y} = 10X_1 - 6}$, $R^2 = r^2_{Y, X_1} = 0,75$, $n = 100$, $\hat{\beta} = 10$

لدينا : $* V(Y) = \frac{\sum (Y_t - \bar{Y})^2}{n} = 1000 \Rightarrow 1000 = \frac{\sum (Y_t - \bar{Y})^2}{100}$.

$\Rightarrow \boxed{\sum (Y_t - \bar{Y})^2 = 100,000}$ (0,25)

$* r^2_{Y, X_1} = R^2 = \hat{\beta}^2 \cdot \frac{\sum (x_{1t} - \bar{x}_1)^2}{\sum (Y_t - \bar{Y})^2} \Leftrightarrow 0,75 = (10)^2 \frac{\sum (x_{1t} - \bar{x}_1)^2}{100,000}$ (0,25)

$\Rightarrow \sum (x_{1t} - \bar{x}_1) = \frac{75000}{100} \Rightarrow \boxed{\sum (x_{1t} - \bar{x}_1)^2 = 750}$ (0,25)

$$* \ \hat{\beta} = \frac{\sum (X_{1t}-\bar{X}_1)(Y_t-\bar{Y})}{\sum (X_{1t}-\bar{X}_1)^2} \Leftrightarrow 10 = \frac{\sum (X_{1t}-\bar{X}_1)(Y_t-\bar{Y})}{750}$$ (0,25) (0,25)

$$\Rightarrow \boxed{\sum (X_{1t}-\bar{X}_1)(Y_t-\bar{Y}) = 7500}$$ (0,25)

$$* \ Cov(X_1, Y) = \frac{\sum (X_{1t}-\bar{X}_1)(Y_t-\bar{Y})}{n} = \frac{7500}{100} \Rightarrow \boxed{Cov(Y, X_1) = 75}$$ (0,25) (0,25)

$$* \ V(X_1) = \frac{\sum (X_{1t}-\bar{X}_1)^2}{n} = \frac{750}{100} \Rightarrow \boxed{V(X_1) = 7,5}$$ (0,25) (0,25)

$$* \ R^2 = r_{Y.X_1} = 0,75 = 1 - \frac{\sum e_t^2}{\sum (Y_t-\bar{Y})^2} \Rightarrow (1-0,75) = \frac{\sum e_t^2}{\sum (Y_t-\bar{Y})^2}$$ (0,5)

علما أن ، $\sum (Y_t-\bar{Y})^2 = 100.000$

$$\sum e_t^2 = (1-0,75)\, 100,000 \Rightarrow \boxed{\sum e_t^2 = 25\,000}$$ (0,25)

لدينا :

$$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon} = \frac{\sum e_t^2}{n-2} \Rightarrow \hat{\sigma}^2_{\varepsilon} = \frac{25000}{100-2} = \frac{25000}{98} = 255,1$$ (0,25)

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\sigma}^2_{\varepsilon} = 255,1} \Rightarrow \hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\sigma}^2_{\varepsilon}}{\sum (X_{1t}-\bar{X}_1)^2} = \frac{255,1}{750} = 0,34 \Rightarrow \boxed{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}} = 0,34}$$ (0,25) (0,25)

$$* \ t_{cal} = \left| \frac{\hat{\beta}}{\hat{\sigma}_{\hat{\beta}}} \right| = 10 / \sqrt{0,34} = 10 / 0,58 = 17,14$$ (0,25)

$$\Rightarrow \boxed{t_{cal} = 17,14}$$ (0,25)

$$* \ t_{tab} = t_{98,\, 0,05} = 1,96 \Rightarrow$$

$$t_{cal} = 17,14 > t_{tab} = 1,96$$ (0,25)

وهذا يعني أن المعلمة $(\hat{\beta}=10)$ لها معنوية إحصائية عند مستوى 5% وهي تختلف عن الصفر.

(0,25)

(نقاط 03,50) 2/ لدينا:

$\hat{Y} = \hat{\alpha} + 4X_2$.

حيث: $\hat{\beta} = 4$, $\bar{X}_2 = 1$, $\bar{Y} = 12$ و

* 0,25

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}_2 \Rightarrow \hat{\alpha} = 12 - 4(1) = 8 \Rightarrow \boxed{\hat{\alpha} = 8}$$ 0,25

$$\Rightarrow \boxed{\hat{Y} = 8 + 4X_2}$$ 0,25

$$* \; r^2_{Y,X_2} = 0,85 = \hat{\beta}^2 \cdot \frac{\sum(X_{2t} - \bar{X})^2}{\sum(Y_t - \bar{Y})^2} = (4)^2 \frac{\sum(X_{2t} - \bar{X})^2}{100,000}$$ 0,25

$$\Rightarrow \sum(X_{2t} - \bar{X}_2)^2 = 100,000 \times 0,85 / 16 \Rightarrow \boxed{\sum(X_{2t} - \bar{X}_2)^2 = 5312,5}$$ 0,25

$$* \; \hat{\beta}^2 = \frac{\sum(X_{2t} - \bar{X}_2)(Y_t - \bar{Y})}{\sum(X_{2t} - \bar{X})^2} \Leftrightarrow 4 = \frac{\sum(X_{2t} - \bar{X}_2)(Y_t - \bar{Y})}{5312,5}$$ 0,25

$$\Rightarrow \boxed{\sum(X_{2t} - \bar{X}_2)(Y_t - \bar{Y}) = 21250}$$ 0,25

$$* \; Cov(X_2, Y) = \sum(X_{2t} - \bar{X}_2)(Y_t - \bar{Y})/n = \frac{21250}{100} = 212,5$$ 0,25

$$* \; V(X_2) = \frac{\sum(X_{2t} - \bar{X}_2)}{n} = \frac{53125}{100} = 53,125$$ 0,25

$$* \; \sum e_t^2 = (1 - 0,85) \cdot 100,000 \Rightarrow \boxed{\sum e_t^2 = 15000}$$ 0,25

$$* \; \hat{S}^2_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{S}^2_{\varepsilon}}{\sum(X_{2t} - \bar{X}_2)^2} \Rightarrow \hat{S}^2_{\varepsilon} = \frac{\sum e_t^2}{n-2} = \frac{15000}{98} = 153,06.$$

$$\Rightarrow \hat{S}^2_{\hat{\beta}} = \frac{153,06}{5312,5} \Rightarrow \boxed{\hat{S}^2_{\hat{\beta}} = 0,03}$$ 0,25

$$* \; t_{cal} = \left| \frac{\hat{\beta}}{\hat{S}_{\hat{\beta}}} \right| = \frac{4}{\sqrt{0,03}} = \frac{4}{0,17} = 23,05$$ 0,25

$$* \; t_{tab} = t_{98, 0,05} = 1,96.$$

$$t_{cal} = 23,05 > t_{tab} = 1,96$$ 0,25

وهذا يعني أن ($\hat{\beta} = 4$) لها معنوية احصائية عند مستوى 5%

وهي تختلف عن الصفر. 0,25

3/ حساب المعاملات $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ للنموذج التالي (1,50 نقطة)

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

لدينا :

$$* \quad \hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y \quad (0,25)$$

من هذه العلاقة نتحصل على :

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1, X_2) \\ Cov(X_1, X_2) & Var(X_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Cov(Y, X_1) \\ Cov(Y, X_2) \end{bmatrix} \quad (0,25)$$

حيث : $Var(X_1) = 7{,}5$, $Var(X_2) = 53.12$, $Cov(X_1, X_2) = ?$

$Cov(Y, X_1) = 75$, $Cov(Y, X_2) = 212{,}5$

$$* \quad R^2 = r^2_{X_1, X_2} = \left[\frac{Cov(X_1, X_2)}{\hat{\delta}_{X_1} \hat{\delta}_{X_2}}\right]^2 = \frac{[Cov(X_1, X_2)]^2}{V(X_1) \cdot V(X_2)} = 0.45 \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow r^2_{X_1, X_2} \quad \frac{[Cov(X_1, X_2)]^2}{7{,}5 \cdot 53.12} = 0.45$$

$$\Rightarrow \left[\sum (X_{1t} - \bar{X}_1)(X_{2t} - \bar{X}_2)/n\right]^2 = 7{,}5 \cdot 53{,}12 \cdot 0{,}45 = 179.28$$

$$\Rightarrow Cov(X_1, X_2) = \sqrt{179{,}28} \Rightarrow Cov(X_1, X_2) = 13.389 \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}5 & 13.39 \\ 13{,}39 & 53{,}12 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 75 \\ 212{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}242 & -0{,}061 \\ -0{,}061 & 0{,}034 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 75 \\ 212{,}5 \end{bmatrix} \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.19 \\ 2{,}69 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\beta}_1 = 5.19 \; ; \; \hat{\beta}_2 = 2{,}69 \quad (0,25)$$