معهد العلوم الاقتصادية

السنة الأولى ماستر — أدوات التوقع والاستشراف

إدارة أعمال — الموسم الجامعي: 2022/2023

التصحيح النموذجي للامتحان

التمرين 1: البرهان على أن (08 نقاط)

$$\hat{\beta} = \frac{Cov(xy)}{V(x)} = r_{xy}\frac{S_y}{S_x}$$

1/ لدينا: (04 نقاط)

$$r_{xy} = \sqrt{\hat{\beta}.\hat{\beta}'} = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\Sigma(x_i-\bar{x})}}\sqrt{\frac{\Sigma(y_i-\bar{y})(x_i-\bar{x})}{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}}$$ 0,25 0,25

$$\Rightarrow r_{xy} = \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}} \quad \ldots\ldots (1)$$ 0,25

- بقسمة العلاقة رقم (1) على (n) نحصل على:

$$r_{xy} = \frac{Cov(x,y)}{\sqrt{V(x)}\sqrt{V(y)}} = \frac{Cov(x,y)}{S_x S_y}$$ 0,25

- أما عند ضرب العلاقة رقم (1) في العبارة $\left(\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\right)$ تصبح: 0,25

$$r_{xy} = \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) \cdot \sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}}{\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}\sqrt{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}} \Rightarrow$$ 0,25

$$r_{xy} = \frac{\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) \cdot \sqrt{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}}{\Sigma(x_i-\bar{x})^2\sqrt{\Sigma(y_i-\bar{y})^2}}$$ 0,25

0,25 ونعلم أن: $\hat{\beta} = \dfrac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}$ — (2)

تصبح:

$$r_{xy} = \hat{\beta} \cdot \frac{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2}}{\sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}} \quad \text{— (3)} \quad 0,25$$

بقسمة البسط والمقام في العبارة رقم (3) على n تصبح: 0,25

$$r_{xy} = \hat{\beta} \cdot \frac{\sqrt{\dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}}{\sqrt{\dfrac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n}}} \Rightarrow r_{xy} = \hat{\beta} \cdot \frac{\hat{S}_x}{\hat{S}_y} \Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = r_{xy} \cdot \frac{\hat{S}_y}{\hat{S}_x}}$$

0,25 0,25 0,25

أما عند قسمة العلاقة رقم (2) على n تصبح:

$$\hat{\beta} = \frac{\dfrac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n}}{\dfrac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} \Rightarrow \boxed{\hat{\beta} = \frac{Cov(x,y)}{V(x)}} \quad 0,25$$

0,25

ومنه فإن:

$$\boxed{\hat{\beta} = \frac{Cov(x,y)}{V(x)} = r_{xy} \cdot \frac{S_y}{S_x}} \quad 0,25$$

وهو المطلوب إثباته

/ لدينا: (04 نقاط)

أي:

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$
$$y_1 = \alpha + \beta x_1 + \varepsilon_1$$
$$y_2 = \alpha + \beta x_2 + \varepsilon_2$$
$$\vdots$$
$$y_n = \alpha + \beta x_n + \varepsilon_n$$

$$\sum y_i = n\alpha + \beta \sum x_i + \sum \varepsilon_i \quad 0,25$$

بالقسمة على n:

$$\sum y_i / n = \frac{n}{n}\alpha + \beta \sum x_i / n + \frac{\sum \varepsilon_i}{n}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{y} = \alpha + \beta \bar{x} + \bar{\varepsilon}} \quad \text{— (1)} \quad 0,25$$

0,25

$$(y_i - \bar{y}) = (\alpha + \beta x_i + \varepsilon_i) - (\alpha + \beta \bar{x} + \bar{\varepsilon}) = (\alpha - \alpha) + \beta(x_i - \bar{x}) + (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})$$

$$\Rightarrow \boxed{(y_i - \bar{y}) = \beta(x_i - \bar{x}) + (\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})} \quad 0,25$$

نعلم سابقا أن :

$\hat{\beta} = \sum w_i y_i$ 0,25

حيث :

$w_i = \frac{(x_i - \bar{x})}{\sum (x_i-\bar{x})^2}$ 0,25

$y_i = (Y_i - \bar{Y})$ 0,25

$\Rightarrow \hat\beta = \sum w_i\left[\beta(x_i - \bar x) + (\varepsilon_i - \bar\varepsilon)\right]$ 0,25

$\Rightarrow \boxed{\hat\beta = \beta\sum w_i(x_i-\bar x) + \sum w_i(\varepsilon_i - \bar\varepsilon)}$ 0,25

نعلم أيضا أن :

$\sum w_i = 0$

$\sum w_i (x_i - \bar x) = 1$ 0,25

يعني أن :

$\hat\beta = \beta + \sum w_i(\varepsilon_i-\bar\varepsilon) = \beta + \sum w_i\varepsilon_i + \sum w_i \bar\varepsilon$ 0,25

$\Rightarrow \hat\beta = \beta + \sum w_i \varepsilon_i + \bar\varepsilon \sum w_i \Rightarrow \boxed{\hat\beta = \sum w_i\varepsilon_i}$ 0,25

0,25

لمعرفة تحيز $(\hat\beta)$ يجب حساب توقعه الرياضي أي : $E(\hat\beta) = ?$

حيث :

0,25 $E(\hat\beta) = E(\beta + \sum w_i\varepsilon_i) = E(\beta) + E(\sum w_i \varepsilon_i)$

$\Rightarrow E(\hat\beta) = \beta + \sum w_i E(\varepsilon_i) \overset{0}{=} \boxed{E(\hat\beta)=\beta}$ 0,25

وهذا يعني أن $(\hat\beta)$ هو مقدر غير متحيز لـ β 0,25

التمرين II : (12 نقطة)

1/ يعطى تباين $(\hat\beta)$ وفق العلاقة التالية :

$\hat\sigma^2_{\hat\beta} = \frac{\hat\sigma^2_\varepsilon}{\sum(X_{1t}-\bar X_1)^2}$ 0,25

حيث : $\boxed{\hat Y = 10X_1 - 6}$, $R^2 = r^2_{Y,X_1} = 0,75$, $n = 100$, $\hat\beta = 10$

لدينا :

0,25

* $V(Y)$ $\frac{\sum(Y_t-\bar Y)^2}{n} = 1000 \Rightarrow 1000 = \frac{\sum(Y_t - \bar Y)^2}{100}$

$\Rightarrow \boxed{\sum(Y_t-\bar Y)^2 = 100,000}$ 0,25

* $r^2_{Y,X_1} = R^2 = \hat\beta^2 \cdot \frac{\sum(X_{1t}-\bar X_1)^2}{\sum(Y_t-\bar Y)^2} \Leftrightarrow 0,75 = (10)^2 \frac{\sum(X_{1t}-\bar X_1)^2}{100,000}$ 0,25

$\Rightarrow \sum(X_{1t}-\bar X_1) = \frac{75000}{100} \Rightarrow \boxed{\sum(X_{1t}-\bar X_1)^2 = 750}$ 0,25

$$*\ \hat{\beta} = \frac{\sum (x_{1t}-\bar{x}_1)(y_t-\bar{y})}{\sum (x_{1t}-\bar{x}_1)^2} \Leftrightarrow 10 = \frac{\sum (x_{1t}-\bar{x}_1)(y_t-\bar{y})}{750}$$ 0,25 0,25

$$\Rightarrow \boxed{\sum (x_{1t}-\bar{x}_1)(y_t-\bar{y}) = 7500}$$ 0,25

$$*\ Cov(x_1, y) = \frac{\sum (x_{1t}-\bar{x}_1)(y_t-\bar{y})}{n} = \frac{7500}{100} \Rightarrow \boxed{Cov(y, x_1) = 75}$$ 0,25 0,25

$$*\ V(x_1) = \frac{\sum (x_{1t}-\bar{x}_1)^2}{n} = \frac{750}{100} \Rightarrow \boxed{V(x_1) = 7,5}$$ 0,25 0,25

$$*\ R^2 = r_{y.x_1} = 0.75 = 1 - \frac{\sum e_t^2}{\sum (y_t-\bar{y})^2} \Rightarrow (1-0,75) = \frac{\sum e_t^2}{\sum (y_t-\bar{y})^2}$$ 0,25

لأن $\sum (y_t-\bar{y})^2 = 100\,000$ 0,25

0,25

$$\sum e_t^2 = (1-0,75)\,100,000 \Rightarrow \boxed{\sum e_t^2 = 25\,000}$$ 0,25

لدينا $$\hat{\delta}_\varepsilon^2 = \frac{\sum e_t^2}{n-2} \Rightarrow \hat{\delta}_\varepsilon^2 = \frac{25000}{100-2} = \frac{25000}{98} = 255,1$$ 0,25 0,25

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\delta}_\varepsilon^2 = 255,1} \Rightarrow \hat{\delta}_{\hat{\beta}}^2 = \frac{\hat{\delta}_\varepsilon^2}{\sum (x_{1t}-\bar{x}_1)^2} = \frac{255,1}{750} = 0,34 \Rightarrow \boxed{\hat{\delta}_{\hat{\beta}}^2 = 0,34}$$ 0,25 0,25

$$*\ t_{cal} = \left| \frac{\hat{\beta}}{\hat{\delta}_{\hat{\beta}}} \right| = 10 / \sqrt{0,34} = 10/0,58 = 17.14$$ 0,25

$$\Rightarrow \boxed{t_{cal} = 17,14}$$ 0,25

$$*\ t_{tab} = t_{98,\,0,05} = 1,96 \Rightarrow$$ 0,25

$$t_{cal} = 17,14 > t_{tab} = 1,96$$ 0,25

وهذا يعني أن المعلمة $(\beta=10)$ لها معنوية إحصائية عند مستوى 5% وهي تختلف عن الصفر.

0,25

2/ لدينا : (04 نقاط)

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + 4X_t$$

حيث : $\hat{\beta} = 4$, $\bar{X}_2 = 1$, $\bar{Y} = 12$

* (0,25)

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X}_2 \Rightarrow \hat{\alpha} = 12 - 4(1) = 8 \Rightarrow \boxed{\hat{\alpha} = 8} \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{Y} = 8 + 4X_2} \quad (0,25)$$

$$* \; r^2_{y,x_2} = 0,85 = \hat{\beta}^2 \cdot \frac{\Sigma(X_{2t} - \bar{X})^2}{\Sigma(Y_t - \bar{Y})^2} \quad (0,25) \quad = (4)^2 \frac{\Sigma(X_{2t} - \bar{X})^2}{100{,}000}$$

$$\Rightarrow \Sigma(X_{2t} - \bar{X}_2)^2 = 100{,}000 \times 0,85 / 16 \quad (0,25) \quad \Rightarrow \boxed{\Sigma(X_{2t} - \bar{X}_2)^2 = 5312,5} \quad (0,25)$$

$$* \; \hat{\beta}^2 = \frac{\Sigma(X_{2t} - \bar{X}_2)(Y_t - \bar{Y})}{\Sigma(X_{2t} - \bar{X})^2} \quad (0,25) \quad \Leftrightarrow 4 = \frac{\Sigma(X_{2t} - \bar{X}_2)(Y_t - \bar{Y})}{5312,5}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Sigma(X_{2t} - \bar{X}_2)(Y_t - \bar{Y}) = 21250} \quad (0,25)$$

$$* \; Cov(X_2, Y) = \Sigma(X_{2t} - \bar{X}_2)(Y_t - \bar{Y}) / n = \frac{21250}{100} = 212,5 \quad (0,25)$$

$$* \; V(X_2) = \frac{\Sigma(X_{2t} - \bar{X}_2)}{n} = \frac{5312,5}{100} = 53,125 \quad (0,25)$$

$$* \; \Sigma e_t^2 = (1 - 0,85) \cdot 100{,}000 \Rightarrow \boxed{\Sigma e_t^2 = 15000} \quad (0,25)$$

$$* \; \hat{S}^2_{\hat{\beta}} = \frac{\hat{S}^2_{e_t}}{\Sigma(X_{2t} - \bar{X}_2)^2} \Rightarrow \hat{S}^2_{e_t} = \frac{\Sigma e_t^2}{n-2} = \frac{15000}{98} = 153,06 \quad (0,25)$$

$$\Rightarrow \hat{S}^2_{\hat{\beta}} = \frac{153.06}{5312,5} \Rightarrow \boxed{\hat{S}^2_{\hat{\beta}} = 0,03} \quad (0,25)$$

$$* \; t_{cal} = \left| \frac{\hat{\beta}}{\hat{S}_{\hat{\beta}}} \right| = \frac{4}{\sqrt{0,03}} = \frac{4}{0,17} = 23,05 \quad (0,25)$$

$$* \; t_{tab} = t_{98,\,0,05} = 1,96$$

$$t_{cal} = 23,05 > t_{tab} = 1,96 \quad (0,25)$$

وهذا يعني أن $(\hat{\beta} = 4)$ لها معنوية احصائية عند مستوى 5%

وهي تختلف عن الصفر . (0,25)

3/ حساب المعاملات $(\hat{\beta}_1 , \hat{\beta}_2)$ للنموذج التالي (02 نقطتين)

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon$$

لدينا :

$$* \quad \hat{\beta} = (X'X)^{-1} X'Y \qquad 0,25$$

من هذه العلاقة نحصل على :

$$\begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Var(X_1) & Cov(X_1,X_2) \\ Cov(X_1,X_2) & Var(X_2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Cov(Y,X_1) \\ Cov(Y,X_2) \end{bmatrix} \qquad 0,25$$

حيث : $Var(X_1) = 7,5$, $Var(X_2) = 53.12$, $Cov(X_1, X_2) = ?$

$Cov(Y, X_1) = 75$, $Cov(Y, X_2) = 212,5$

$$* \quad R^2 = r^2_{X_1,X_2} = \left[\frac{Cov(X_1,X_2)}{\hat{S}_{X_1} \hat{S}_{X_2}} \right]^2 = \frac{[Cov(X_1,X_2)]^2}{V(X_1) \cdot V(X_2)} = 0,45 \qquad 0,25 \quad 0,25$$

$$\Rightarrow r^2_{X_1,X_2} \quad \frac{[Cov(X_1,X_2)]^2}{7,5 \cdot 53,12} = 0,45$$

$$\Rightarrow \left[\sum (X_{1t} - \bar{X}_1)(X_{2t} - \bar{X}_2)/n \right]^2 = 7,5 \cdot 53,12 \cdot 0,45 = 179,28 \qquad 0,25$$

$$\Rightarrow Cov(X_1, X_2) = \sqrt{179,28} \Rightarrow Cov(X_1,X_2) = 13,389 \qquad 0,25$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,5 & 13,39 \\ 13,39 & 53,12 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 75 \\ 212,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,242 & -0,061 \\ -0,061 & 0,034 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 75 \\ 212,5 \end{bmatrix} \qquad 0,25$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,19 \\ 2,69 \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\beta}_1 = 5,19 \; ; \; \hat{\beta}_2 = 2,69 \qquad 0,25$$